Examen VWO

2015

tijdvak 2
woensdag 17 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Lepelaars

foto

Een lepelaar is een vogel met een lepelvormige snavel die in Nederland onder andere op de Waddeneilanden voorkomt. Sommige lepelaars hebben ringen om hun poten, waardoor onderzoekers ze individueel kunnen volgen.

De lepelaar op de foto is geringd volgens een oud systeem. Hierbij kreeg de lepelaar één grote ring om elke poot. Elk van deze twee ringen kon in acht kleuren voorkomen. Bovendien kreeg de lepelaar ook nog een kleine, zilverkleurige ring om één van zijn poten. Deze ring kon om de linker- of rechterpoot zitten en kon zowel boven als onder de gekleurde ring zitten.

3p **1** Bereken op hoeveel verschillende manieren een lepelaar met dit systeem geringd kon worden.

Vanaf 2007 is gekozen voor een nieuw systeem. Hierbij krijgt de lepelaar zes smallere ringen om, drie om elke poot. In het nieuwe systeem gelden de volgende regels:

- één van de zes ringen is een zilverkleurige ring;
- de andere vijf ringen kunnen voorkomen in acht andere kleuren, waarbij dezelfde kleur ook vaker gebruikt mag worden;
- één van die vijf gekleurde ringen heeft een uitsteeksel, een 'vlag'.

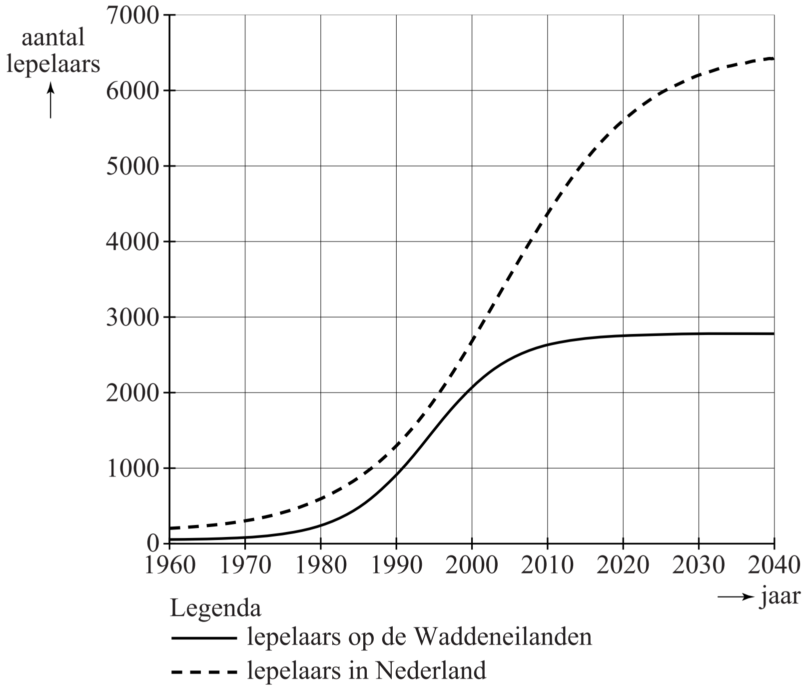
4p **2** Bereken op hoeveel verschillende manieren een lepelaar met dit nieuwe systeem geringd kan worden.

Onderzoekers hebben op basis van waarnemingen modellen opgesteld voor het aantal lepelaars in Nederland. In de figuur zie je de aantallen lepelaars voor de Waddeneilanden en voor heel Nederland in de periode 1960-2040. De figuur staat ook op de uitwerkbijlage. De doorgetrokken grafiek is een model voor het aantal lepelaars op de Waddeneilanden en de gestippelde grafiek voor het totale aantal lepelaars in Nederland.

Uit de figuur kun je aflezen dat het percentage van het totale aantal lepelaars in Nederland dat op de Waddeneilanden leeft, in de periode 1980 tot 2000 toegenomen is tot meer dan 75%.

We kijken naar het percentage van het totaal aantal lepelaars in Nederland dat op de Waddeneilanden leeft.

figuur



3p **3** Onderzoek met behulp van een redenering aan de hand van de figuur of dit percentage in de periode 2010-2040 toeneemt of afneemt.

In de periode 1980-2000 groeide het aantal lepelaars op de Wadden-eilanden bij benadering exponentieel. In 1980 waren er ongeveer 200 lepelaars op de Waddeneilanden en in 2000 ongeveer 2100. Op basis van deze gegevens kun je een formule opstellen voor deze exponentiële groei. Met deze formule is het aantal lepelaars op de Waddeneilanden in 2010 te voorspellen.

5p **4** Stel deze formule op en bereken het verschil tussen het aantal lepelaars op de Waddeneilanden in 2010 volgens deze formule en volgens het model in de figuur. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Een betere benadering voor het aantal lepelaars op de Waddeneilanden geeft de volgende formule:

$$N = \frac{2780}{1 + 12{,}9 \cdot 0{,}834^t}$$

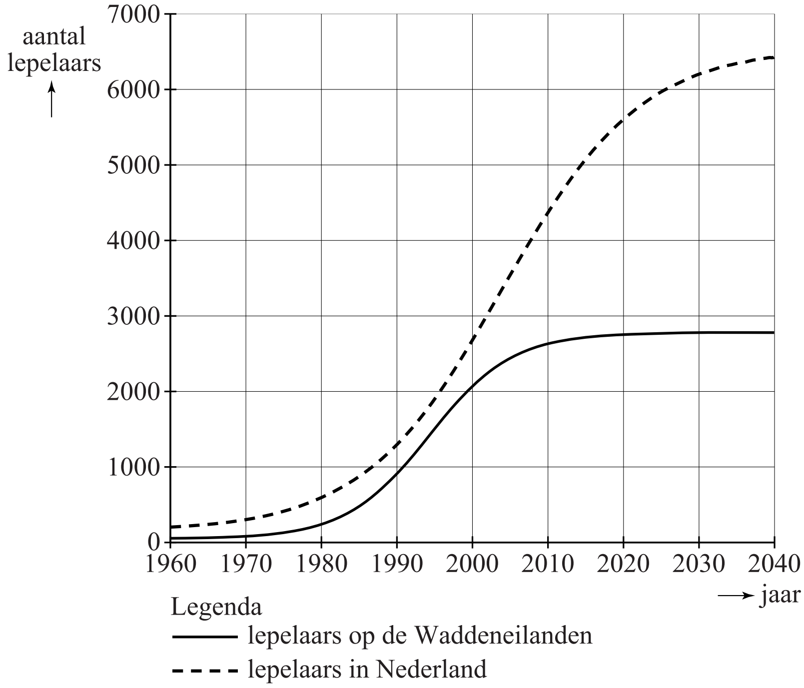
Hierin is N het aantal lepelaars en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 maart 1980. Volgens dit model zal het aantal lepelaars op de Waddeneilanden toenemen tot een grenswaarde.

3p **5** Beredeneer aan de hand van de formule hoe groot deze grenswaarde is.

uitwerkbijlage

3 en 4

figuur



Cijfers geven

Bij proefwerken wordt het cijfer berekend op basis van een behaald aantal punten. Hiervoor bestaan verschillende methoden. Een methode is met behulp van tabellen, waaruit een proefwerkcijfer snel afgelezen kan worden. Op de uitwerkbijlage zie je twee van dergelijke tabellen. Beide tabellen zijn niet helemaal volledig.

In de bovenste rij van beide tabellen staat het maximum aantal punten dat voor het proefwerk behaald kan worden. In de eerste kolom staat het aantal behaalde punten.

Wanneer een leerling bijvoorbeeld 21 punten heeft voor een proefwerk waarin hij maximaal 32 punten kan behalen, krijgt hij volgens tabel 2 het cijfer 6,9.

Chris heeft twee proefwerken gemaakt en voor beide proefwerken hetzelfde cijfer gekregen. Voor het eerste proefwerk kon hij maximaal 16 punten behalen; hij behaalde er 10. Voor het tweede proefwerk was het maximale aantal punten 34.

2p **6** Hoeveel punten heeft Chris voor het tweede proefwerk behaald? Maak hiervoor gebruik van de tabellen op de uitwerkbijlage. Licht je antwoord toe.

De berekening van de proefwerkcijfers in deze tabellen gaat als volgt:
- bij het behalen van 0 punten is het cijfer gelijk aan 1;
- bij het behalen van het maximale aantal punten is het cijfer gelijk aan 10;
- het cijfer neemt lineair toe met het aantal behaalde punten;
- daarna wordt het cijfer afgerond op één decimaal.

In tabel 1 op de uitwerkbijlage ontbreekt in de laatste kolom één proefwerkcijfer.

3p **7** Bereken dit proefwerkcijfer volgens de hierboven beschreven methode.

Bij vierkeuzevragen, waarbij steeds precies één van de vier antwoorden goed is, gaat het anders. Een leerling die geen enkel antwoord weet, zal naar verwachting een kwart van de vragen goed gokken. De berekening houdt daar rekening mee door ervan uit te gaan dat een kwart van de vragen goed beantwoord wordt. De overige antwoorden tellen mee voor de score. Daarbij wordt de methode van vraag 7 gebruikt. Bij minder dan een kwart van de antwoorden goed wordt het cijfer 1 toegekend.

Wanneer een leerling van de 40 vierkeuzevragen er 30 goed heeft, gaat het als volgt: 10 goede antwoorden (een kwart van de 40) worden weggelaten. Van de overgebleven 30 vragen heeft de leerling er 20 goed en dat levert volgens de hierboven genoemde procedure het cijfer 7,0 op.

Annette heeft een proefwerk gemaakt van 48 vierkeuzevragen.

4p **8** Bereken hoeveel antwoorden Annette goed moet hebben om een 6,0 te krijgen.

Op de uitwerkbijlage is een assenstelsel getekend. Langs de horizontale as staat het aantal goed beantwoorde vragen weergegeven dat hoort bij een proefwerk van 40 vierkeuzevragen. Langs de verticale as staat het proefwerkcijfer vermeld.

4p **9** Teken de grafiek die bij deze situatie hoort.

Er zijn ook proefwerken met meerkeuzevragen, waarbij niet alle vragen hetzelfde aantal antwoordmogelijkheden hebben. Het cijfer voor zulke proefwerken kan op een vergelijkbare manier worden berekend.

- Eerst wordt bepaald hoeveel antwoorden naar verwachting goed gegokt zijn. Deze antwoorden tellen niet mee voor de berekening.
- Met de juiste antwoorden die wel meetellen, wordt vervolgens met de methode van vraag 7 het cijfer bepaald.

We gaan uit van een proefwerk met 12 driekeuzevragen en 28 vierkeuzevragen. We kunnen een formule opstellen om het cijfer C te berekenen aan de hand van het aantal goed beantwoorde vragen G. Deze formule heeft vanaf een bepaalde waarde van G de vorm $C = a \cdot G + b$ met $a \neq 0$.

5p **10** Bereken vanaf welke waarde van G de formule deze vorm heeft en bereken de waarden van a en b in twee decimalen nauwkeurig.

uitwerkbijlage

6 en 7

tabel 1

	maximum aantal te behalen punten								
aantal behaalde punten	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
1	2,1	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,6
2	3,3	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1
3	4,4	4,0	3,7	3,5	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7
4	5,5	5,0	4,6	4,3	4,0	3,8	3,6	3,4	3,3
5	6,6	6,0	5,5	5,1	4,8	4,5	4,2	4,0	3,8
6	7,8	7,0	6,4	5,9	5,5	5,2	4,9	4,6	4,4
7	8,9	8,0	7,3	6,7	6,3	5,8	5,5	5,2	4,9
8	10	9,0	8,2	7,5	7,0	6,5	6,1	5,8	5,5
9		10	9,1	8,4	7,8	7,2	6,8	6,4	6,1
10			10	9,2	8,5	7,9	7,4	7,0	6,6
11				10	9,3	8,6	8,1	7,6	7,2
12					10	9.3	8,7	8,2	7,8
13						10	9,4	8,8	
14							10	9,4	8,9
15								10	9,4
16									10

uitwerkbijlage

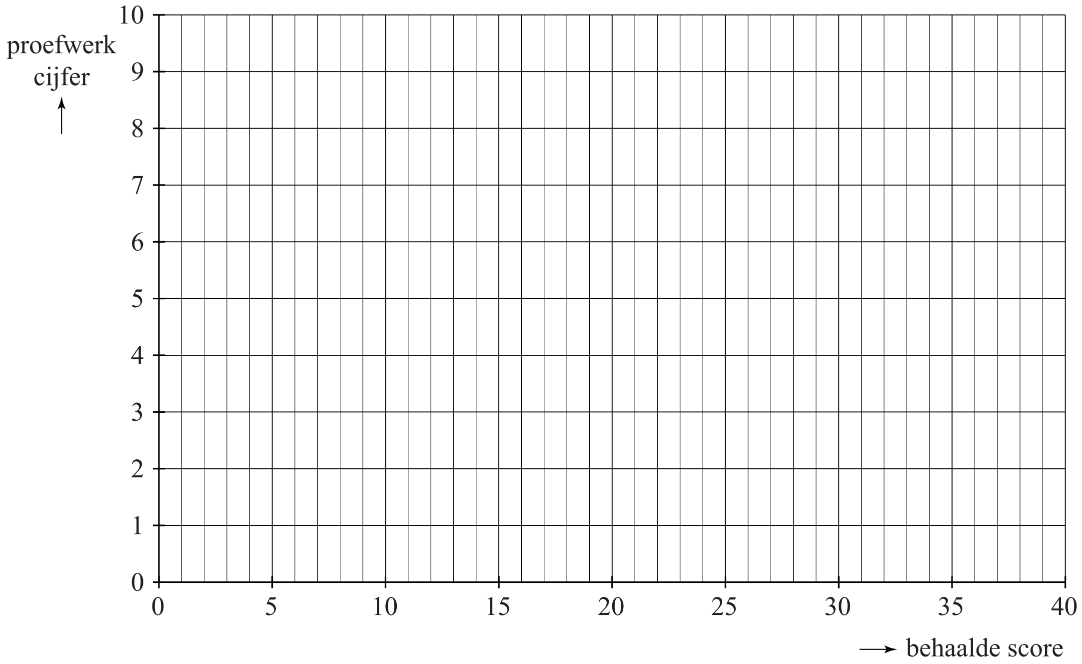
6

tabel 2

	maximum aantal te behalen punten								
aantal behaalde punten	30	31	32	33	34	35	36	37	38
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
1	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,2	1,2
2	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
3	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7
4	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9
5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2
6	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,4
7	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7
8	3,4	3,3	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	2,9	2,9
9	3,7	3,6	3,5	3,5	3,4	3,3	3,3	3,2	3,1
10	4,0	3,9	3,8	3,7	3,6	3,6	3,5	3,4	3,4
11	4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8	3,8	3,7	3,6
12	4,6	4,5	4,4	4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8
13	4,9	4,8	4,7	4,5	4,4	4,3	4,3	4,2	4,1
14	5,2	5,1	4,9	4,8	4,7	4,6	4,5	4,4	4,3
15	5,5	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8	4,6	4,6
16	5,8	5,6	5,5	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8
17	6,1	5,9	5,8	5,6	5,5	5,4	5,3	5,1	5,0
18	6,4	6,2	6,1	5,9	5,8	5,6	5,5	5,4	5,3
19	6,7	6,5	6,3	6,2	6,0	5,9	5,8	5,6	5,5
20	7,0	6,8	6,6	6,5	6,3	6,1	6,0	5,9	5,7
21	7,3	7,1	6,9	6,7	6,6	6,4	6,3	6,1	6,0
22	7,6	7,4	7,2	7,0	6,8	6,7	6,5	6,4	6,2
23									
24									

uitwerkbijlage

9



Eén tegen honderd

Eén tegen honderd is een populair televisiespelletje. Eén kandidaat speelt tegen 100 tegenspelers. Er wordt een vraag gesteld die eerst alle tegenspelers via een kastje beantwoorden. Daarna beantwoordt de kandidaat de vraag. Is zijn antwoord goed dan krijgt hij een bedrag voor elke tegenspeler die de vraag fout beantwoordde.
Deze tegenspelers doen daarna niet meer mee. Zij zijn 'weggespeeld'. Het spel gaat verder met de overige spelers met de volgende ronde: er wordt weer een vraag gesteld. Dit gaat door tot de kandidaat een fout antwoord geeft of er geen tegenspelers meer over zijn.

Bij iedere vraag geldt het volgende: het bedrag dat per weggespeelde speler door de kandidaat tijdens de betreffende ronde gewonnen wordt, is gelijk aan € 50 000 gedeeld door het aantal nog meespelende tegenspelers. Dus als er nog 50 tegenspelers over zijn, is elke tegenspeler € 1000 waard. Zijn er dan 6 die het antwoord fout hebben, dan voegt de kandidaat € 6000 toe aan zijn totaalbedrag en speelt hij verder tegen de overige 44 spelers. Alle berekende bedragen worden voortdurend op gehele euro's afgerond. We gaan er in deze opgave van uit dat de kandidaat op alle vragen het goede antwoord weet en we zien af van andere regels van het spel.

4p **11** Bereken hoeveel een kandidaat in totaal wint als hij in vijf rondes elke keer 20 tegenspelers wegspeelt.

In een bepaalde spelsituatie zijn er nog vier tegenspelers over. Die kan onze kandidaat in één keer wegspelen. Hij kan ze ook één voor één wegspelen.
Het maakt voor het te winnen bedrag niet uit of er beurten tussen zitten waarbij geen tegenspelers worden weggespeeld. Zo levert 0-0-0-4 hetzelfde op als 0-4 en ook als 4. We noteren dat allemaal als 4.

Eén voor één wegspelen (1-1-1-1 dus) van deze vier tegenspelers levert veel meer op dan de vier spelers in één keer uitschakelen.

3p **12** Bereken dat verschil in opbrengst.

Er zijn nog meer mogelijkheden om ze weg te spelen dan deze 4 en 1-1-1-1. We gaan er daarbij van uit dat er in elke ronde minstens één tegenspeler wordt weggespeeld.

3p **13** Bereken hoeveel verschillende mogelijkheden er in totaal zijn om de laatste vier tegenspelers weg te spelen.

Het lukt de kandidaten niet vaak alle tegenstanders weg te spelen. Maar als ze winnen, blijken ze altijd minstens € 50 000 te winnen[1)].

3p **14** Leg uit waarom een winnaar altijd minstens € 50 000 wint.

Door per ronde steeds één speler weg te spelen, wint de kandidaat het maximale bedrag. In de tabel zie je hoe het totaalbedrag bij dit spelverloop oploopt. Ook hierbij zijn alle bedragen steeds tussentijds op hele euro's afgerond.

tabel

ronde n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
aantal spelers bij begin van ronde	100	99	98	…	…	…
waarde van de in deze ronde weggespeelde speler	500	505	510	…	…	…
totaalbedrag B_n na ronde n	500	1005	1515	…	…	…

3p **15** Bereken het totaalbedrag na ronde 6.

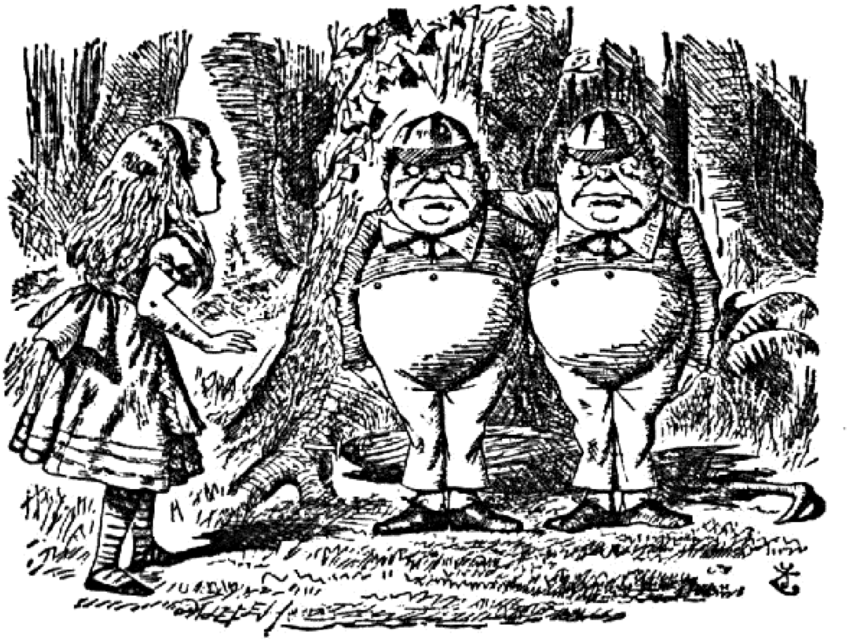
noot 1 Dat dit bij het echte televisiespel niet altijd gebeurt, is een gevolg van de andere spelregels waar we in deze opgave dus geen rekening mee houden.

Tweelingbroers

De tweelingbroers Tweedledee en Tweedledum zijn uiterlijk niet van elkaar te onderscheiden. Om de verwarring te vergroten, hebben ze de volgende afspraken met elkaar gemaakt:

1 Op maandag, dinsdag en woensdag liegt Tweedledee bij elke vraag die hem gesteld wordt en op alle andere dagen spreekt hij de waarheid.
2 Op donderdag, vrijdag en zaterdag liegt Tweedledum bij elke vraag die hem gesteld wordt en op alle andere dagen spreekt hij de waarheid.

We gaan ervan uit dat deze afspraken in deze gehele opgave gelden.



Op zekere dag ontmoet Alice de tweeling en vraagt elk van hen: "Hoe heet jij?"
De ene tweelingbroer heeft een groene jas aan en zegt: "Tweedledee".
De andere tweelingbroer heeft een rode jas aan en zegt: "Tweedledum".

5p **16** Onderzoek hoe de broer met de groene jas heet.

Elke tweelingbroer heeft altijd een zakdoek in zijn broekzak: als de ene tweelingbroer een rode zakdoek heeft, heeft de ander een zwarte en omgekeerd.
Op zekere dag komt Alice de tweelingbroers tegen. Ze vraagt aan een van beiden: "Welke kleur zakdoek heb je?"
Het antwoord van deze tweelingbroer luidt: "Zwart".
Op verzoek van Alice laat hij de zakdoek zien. Deze blijkt rood te zijn.
Daarop vraagt Alice aan de andere tweelingbroer: "Welke kleur zakdoek heb jij?"

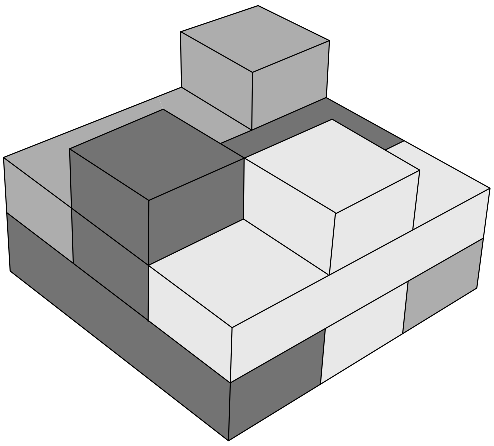
4p **17** Welke kleur zal hij noemen? Leg duidelijk uit hoe je tot die conclusie komt.

Aanschuifwoningen

De Amsterdamse architect Janjaap Ruijssenaars kwam in 2013 met een nieuw ontwerp voor in elkaar geschoven woningen.

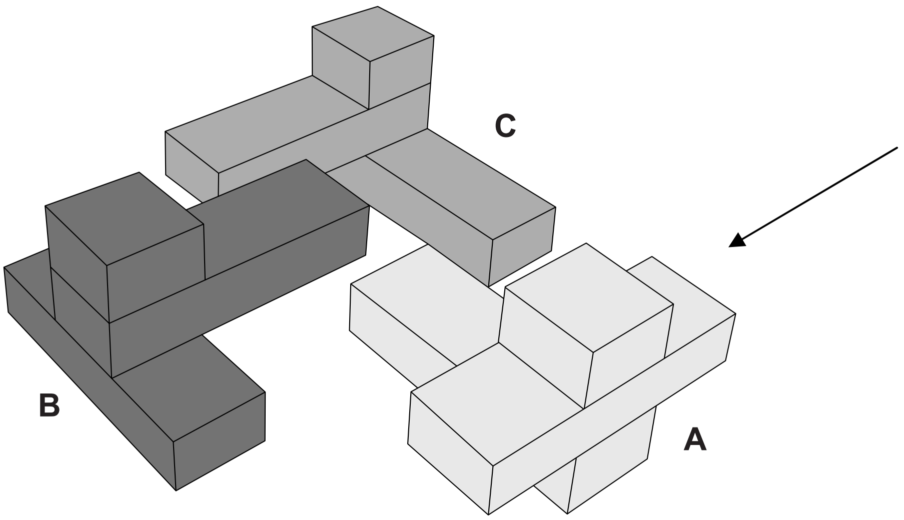
Zo'n eenheid van drie woningen ziet er in een maquette bijvoorbeeld uit zoals in figuur 1. Elke woning heeft zijn eigen kleur.

figuur 1



Een eenheid bevat dus drie woningen. Hoe ze in elkaar geschoven zijn, kun je goed zien als ze uit elkaar geschoven worden. Zie figuur 2.

figuur 2



Elke woning bestaat uit drie delen:
- een balk op de begane grond;
- loodrecht daarop een balk op de eerste verdieping;
- op de balk van de eerste verdieping een vierkant blok op de tweede verdieping.

De richting van de balken op de begane grond ligt vast. Om ieders uitzicht op de tweede verdieping vrij te houden, staan er nooit twee of meer blokken op de tweede verdieping in één rij.

4p **18** Bereken op hoeveel manieren je onder deze voorwaarden een eenheid van drie woningen kunt samenstellen.

In figuur 2 is door middel van een pijl een kijkrichting aangegeven.

3p **19** Teken het aanzicht van de in de figuur getekende eenheid van drie woningen als je in de richting van de pijl kijkt. Gebruik de letters A, B en C om de verschillende woningen aan te geven.

De balken op de begane grond en op de eerste verdieping zijn 14 600 mm lang en 4600 mm breed. De vierkante blokken op de tweede verdieping hebben zijden van 4600 mm. De hoogte van elke verdieping is 2800 mm. Alle genoemde afmetingen zijn binnenmaten.

4p **20** Bereken het volume van één woning in m^3.

Op de uitwerkbijlage is een begin getekend van de perspectieftekening van woning A. Het vierkante blok op de tweede verdieping en de balk op de begane grond zijn al getekend. Alleen de balk op de eerste verdieping is nog niet af. De perspectieftekening bekijkt woning A vanuit de richting die met de pijl in figuur 2 is aangegeven.

4p **21** Maak de perspectieftekening af.

uitwerkbijlage

21